(ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ)

Δίνεται το πεδίο $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : F(x,y) = \left(xy, \frac{1}{2}(x^2-y^2)\right)$

Δείξτε ότι το πεδίο είναι διαφορίσιμο.

Εξετάστε για ποια σημεία (x,y) υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση F^{-1}, και υπολογίστε την παράγωγό της.

// Είναι, $\nabla F = J_F = \begin{pmatrix} y & x \\ x & -y \end{pmatrix}$, συνεχής, ως πίνακας με στοιχεία συνεχείς συναρτήσεις (πολυώνυμα).

Άρα F συνεχώς διαφορίσιμο πεδίο, άρα και διαφορίσιμο.

Είναι, $\det(J_F) = -y^2 - x^2 \neq 0 \iff (x,y) \neq (0,0)$,

άρα η F^{-1} υπάρχει $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Είναι,

$$(F^{-1})'(x,y) = (J_F^{-1})(x,y) = \frac{1}{-x^2-y^2}\begin{pmatrix} -y & -x \\ -x & y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} y & x \\ x & -y \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2+y^2} J_F$$

Ας είναι $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : F(\bar{r}) = (z^3 + xy^2, x^3y - z, x^2 + zy^2)$
Εξετάστε αν F διαφορίσιμο, κι αν είναι, βρείτε τη βέλτιστη γραμμική προσέγγιση του πεδίου F σε μια περιοχή του σημείου $(-2, 0, 1)$.

// Είναι, $\nabla F = J_F = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy & 3z^2 \\ 3x^2y & x^3 & -1 \\ 2x & 2yz & y^2 \end{pmatrix}$,

συνεχής (στοιχεία πολυώνυμα), άρα F συνεχώς διαφορίσιμο, άρα και διαφορίσιμο.

Εφόσον F διαφορίσιμο, υπάρχει βέλτιστη γραμμική προσέγγιση του πεδίου στο σημείο $(-2, 0, 1)$, με

$$G(\bar{r})^t = F(-2,0,1)^t + \nabla F(-2,0,1) \cdot (x+2, y, z-1)^t$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -8 & -1 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+2 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3z-2 \\ -8y-z \\ -4x-4 \end{pmatrix}$$

Άρα, το πεδίο $G(\bar{r}) = (3z-2, -8y-z, -4x-4)$, είναι η βέλτιστη προσέγγιση.

Να βρεθούν όλες οι πραγματικές $\overset{\text{μη σταθερές}}{\vee}$ συναρτήσεις $f(r)$, $r = \|\bar{r}\| = \sqrt{\sum_{1}^{n} x_i^2}$, τ.ω $\nabla \cdot (f(r)\bar{r}) = 0$.

// Είναι, $0 = \nabla \cdot (f(r)\bar{r}) = \nabla f(r) \cdot \bar{r} + f(r)(\nabla \cdot \bar{r})$

$$= \left(\frac{\partial f(r)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(r)}{\partial x_n}\right) \cdot \bar{r} + f(r)\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial x_n}{\partial x_n}\right)$$

$$\overset{\text{Κ.Αλ.}}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial r}{\partial x_n}\right) \cdot \bar{r} + f(r)(\underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ πλήθος}})$$

$$\overset{f \text{ μιας}}{\underset{\text{μεταβλητής}}{=}} \left(\frac{f'(r)\, x_1}{r}, \dots, \frac{f'(r)\, x_n}{r}\right) \cdot \bar{r} + n f(r)$$

$$= \frac{f'(r)}{r} \cdot \bar{r} \cdot \bar{r} + n f(r) = \frac{f'(r)\, r^{\cancel{2}}}{\cancel{r}} + n f(r)$$

$$= f'(r) r + n f(r), \text{ οπότε } \frac{f'(r)}{f(r)} \underset{\underline{f(r),\ \frac{n}{r} \text{ συνεχείς}}}{=} -\frac{n}{r}$$

$\ln f(r) = -n \ln r + c$, οπότε $\ln f(r) = \ln r^{-n} + \ln e^{c}$

$$= \ln \frac{e^{c}}{r^{n}} \overset{\ln\ 1-1}{=} \boxed{f(r) = \frac{e^{c}}{r^{n}} = \frac{C}{r^{n}}, \text{ με } C = \pm e^{\ln C} \quad \begin{matrix} + \text{ αν } C > 0 \\ - \text{ αν } C < 0 \end{matrix}}$$

c, σταθ.

Έστω πεδίο $F = \bar{\alpha} \times \bar{r}$, όπου $\bar{\alpha}$ σταθερό διάνυσμα

Υπολογίστε την απόκλιση και περιστροφή του πεδίου F.

// Είναι, $\bar{\alpha} \times \bar{r} = \left| \begin{pmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ x & y & z \end{pmatrix} \right|$, όπου $\{e_i\}$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^3$

$$= (\alpha_2 z - \alpha_3 y, \alpha_3 x - \alpha_1 z, \alpha_1 y - \alpha_2 x)$$

Άρα $\nabla \cdot (\bar{\alpha} \times \bar{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_2 z - \alpha_3 y) + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha_3 x - \alpha_1 z) + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha_1 y - \alpha_2 x) = 0 + 0 + 0 = 0$, δηλ $\operatorname{div} F = 0$

$$\nabla \times (\bar{\alpha} \times \bar{r}) = \left| \begin{pmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \alpha_2 z - \alpha_3 y & \alpha_3 x - \alpha_1 z & \alpha_1 y - \alpha_2 x \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(\alpha_1 y - \alpha_2 x) - \frac{\partial}{\partial z}(\alpha_3 x - \alpha_1 z), \frac{\partial}{\partial z}(\alpha_2 z - \alpha_3 y) - \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_1 y - \alpha_2 x), \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_3 x - \alpha_1 z) - \frac{\partial}{\partial y}(\alpha_2 z - \alpha_3 y) \right) = (2\alpha_1, 2\alpha_2, 2\alpha_3) = 2\bar{\alpha}$$

, δηλ $\operatorname{curl} F = 2\bar{\alpha}$

Αν $F(\bar{r}) = r^{-2}\bar{r}$, όπου $\bar{r} = (x,y,z)$, $r = \|\bar{r}\| \neq 0$,

να υπολογισθούν η απόκλιση και η περιστροφή του πεδίου F

// Είναι, $\nabla\cdot(r^{-2}\bar{r}) = (\nabla r^{-2})\cdot\bar{r} + r^{-2}\underbrace{(\nabla\cdot\bar{r})}_{3}$

$= (-2r^{-3}\nabla r)\cdot\bar{r} + 3r^{-2} = \left(-\frac{2r^{-3}}{r}\bar{r}\right)\cdot\bar{r} + 3r^{-2}$

$= \frac{-2r^{-3}r^{2}}{r} + 3r^{-2} = -2r^{-2} + 3r^{-2} = r^{-2} = \frac{1}{r^{2}}$

Είναι, $\nabla\times(r^{-2}\bar{r}) = (\nabla r^{-2})\times\bar{r} + r^{-2}\cancel{\underbrace{(\nabla\times\bar{r})}_{\bar{0}}}^{\bar{0}}$

$= \left(-\frac{2r^{-3}}{r}\bar{r}\right)\times\bar{r} = -\frac{2r^{-3}}{r}\underbrace{(\bar{r}\times\bar{r})}_{\bar{0}} = \bar{0}$

Αν $\bar{r} = (x,y,z)$, $r = \|\bar{r}\| \neq 0$, δείξτε ότι:

(α) $\nabla f(r) = \frac{f'(r)}{r}\bar{r}$, (β) $\nabla\cdot(r^3\bar{r}) = 6r^3$

(γ) $\nabla\times\left(\frac{\bar{r}}{r}\right) = \bar{0}$

// (α) $\nabla f(r) = \left(\frac{\partial}{\partial x}f(r), \frac{\partial}{\partial y}f(r), \frac{\partial}{\partial z}f(r)\right)$

$= \left(f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}, f'(r)\frac{\partial r}{\partial y}, f'(r)\frac{\partial r}{\partial z}\right) = \left(f'(r)\frac{x}{r}, f'(r)\frac{y}{r}, f'(r)\frac{z}{r}\right)$

$= \frac{f'(r)}{r}(x,y,z) = \frac{f'(r)}{r}\bar{r}$

(β) $\nabla\cdot(r^3\bar{r}) = (\nabla r^3)\cdot\bar{r} + r^3\underbrace{(\nabla\cdot\bar{r})}_{3} = (3r^2\nabla r)\cdot\bar{r} + 3r^3$

$= \left(\frac{3r^2}{r}\bar{r}\right)\cdot\bar{r} + 3r^3 = \frac{3r^2 r^{\cancel{2}}}{\cancel{r}} + 3r^3 = 3r^3 + 3r^3 = 6r^3$

(γ) $\nabla\times\left(\frac{\bar{r}}{r}\right) = \frac{\underbrace{\cancel{(\nabla\times\bar{r})}}_{\bar{0}}\, r - \bar{r}\times(\nabla r)}{r^2} = \frac{(\nabla r)\times\bar{r}}{r^2}$

$= \frac{\frac{\bar{r}}{r}\times\bar{r}}{r^2} = \frac{\bar{r}\times\bar{r}}{r^3} = \frac{\bar{0}}{r^3} = \bar{0}$

Αν $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\neq 0$, δείξτε ότι:

(α) $\nabla^2 f(r) = f''(r) + \dfrac{2f'(r)}{r}$, (β) $\nabla^2\left(\nabla\cdot\dfrac{\bar{r}}{r^2}\right) = \dfrac{2}{r^4}$

// (α) $\nabla^2 f(r) = \nabla\cdot(\nabla f(r)) = \nabla\cdot\left(\dfrac{f'(r)}{r}\bar{r}\right)$

$$= \left(\nabla\left(\frac{f'(r)}{r}\right)\right)\cdot\bar{r} + \frac{f'(r)}{r}\underbrace{(\nabla\cdot\bar{r})}_{3}$$

$$= \left(\frac{f''(r)r - f'(r)}{r^2}\,\frac{\bar{r}}{r}\right)\cdot\bar{r} + \frac{3f'(r)}{r}$$

$$= \frac{f''(r)r - f'(r)}{r} + \frac{3f'(r)}{r} = f''(r) + \frac{2f'(r)}{r}$$

(β) $\nabla\cdot\left(\dfrac{\bar{r}}{r^2}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{x^2+y^2+z^2}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)$

$$= \frac{-x^2+y^2+z^2}{r^4} + \frac{-y^2+x^2+z^2}{r^4} + \frac{-z^2+x^2+y^2}{r^4} = \frac{r^2}{r^4} = \frac{1}{r^2} = g(r)$$

Η (α) ισχύει $\forall\, f(r)$, οπότε για $f(r) = g(r) = \dfrac{1}{r^2}$, έχω

$$\nabla^2\left(\nabla\cdot\frac{\bar{r}}{r^2}\right) = \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{1}{r}\right)'' + \frac{2\left(\frac{1}{r}\right)'}{r}$$

$$= \frac{6r^2}{r^6} - \frac{4}{r^4} = \frac{6}{r^4} - \frac{4}{r^4} = \frac{2}{r^4}$$

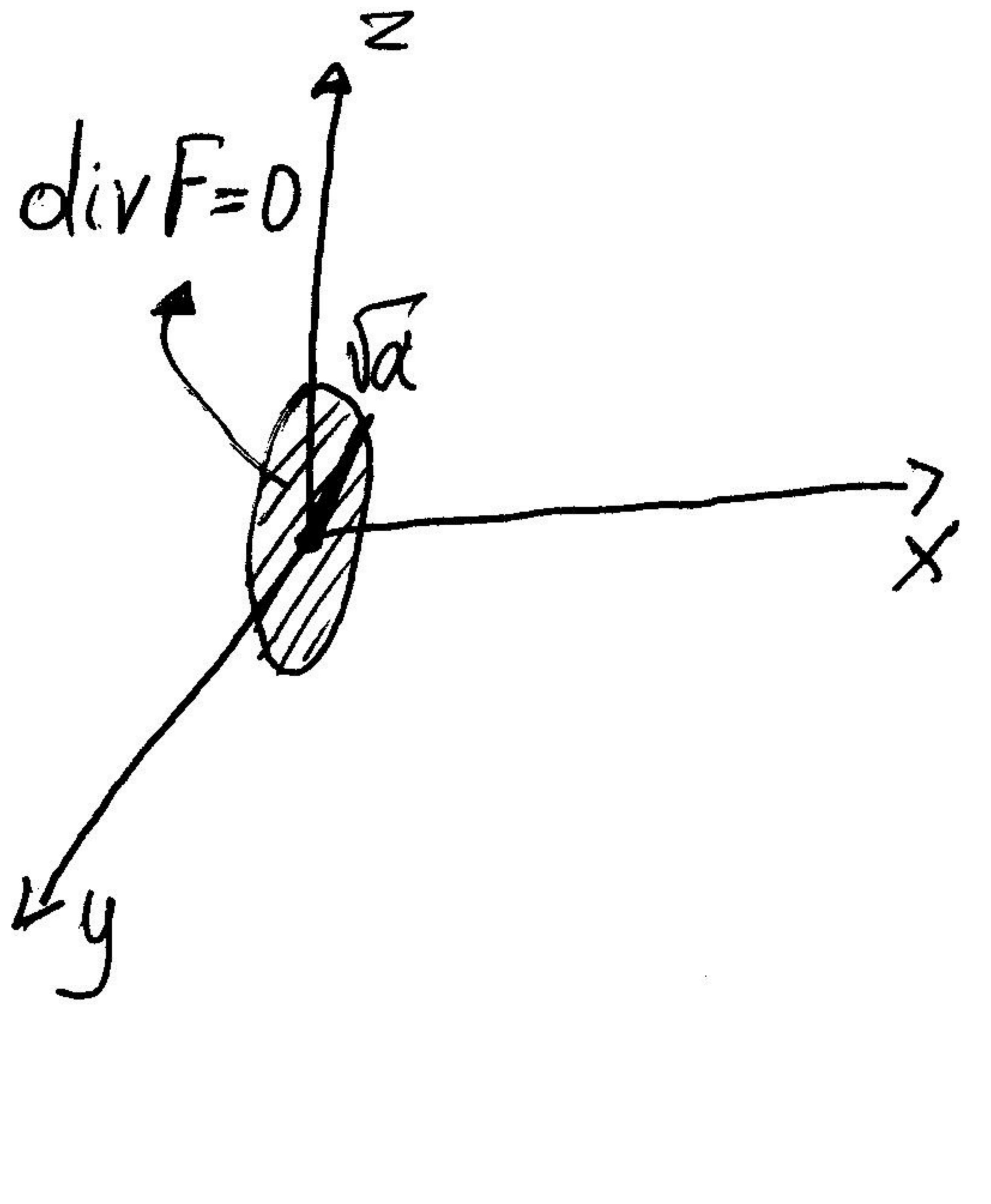
Αν $F(\bar{r}) = \left(\frac{x^3}{3} + y^3,\ x^2 - \alpha y^2 + z^4,\ 2x + 3y + \frac{z^3}{3}\right)$

, $\alpha \in \mathbb{R}$, βρείτε την επιφάνεια πάνω στην οποία το πεδίο είναι ασυμπίεστο ($divF = 0$)

// Είναι, $0 = divF = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{3} + y^3\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - \alpha y^2 + z^4\right)$

$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(2x + 3y + \frac{z^3}{3}\right) = x^2 - \alpha^2 + z^2$, δηλ $\alpha^2 = x^2 + z^2$

Σχηματικά



Αν $F(x,y,z) = (x-3z,\ 2y+z,\ x+\alpha z)$, υπολογίστε τη σταθερά α ώστε $\operatorname{div} F = 0$.

// Είναι: $0 = \nabla \cdot F = \frac{\partial}{\partial x}(x-3z) + \frac{\partial}{\partial y}(2y+z) + \frac{\partial}{\partial z}(x+\alpha z)$

$= 1 + 2 + \alpha = 3 + \alpha$, δηλ. $\alpha = -3$

Αν f, g είναι δυο βαθμωτά πεδία με συνεχείς μερικές παραγώγους στον $\mathbb{R}^3$, δείξτε ότι $div(grad f \times grad g) = 0$

// $div(grad f \times grad g) = \nabla \cdot (\nabla f \times \nabla g)$

$$= \left| \begin{pmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \partial f/\partial x & \partial f/\partial y & \partial f/\partial z \\ \partial g/\partial x & \partial g/\partial y & \partial g/\partial z \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x}\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}$$

$$- \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\xlongequal[\text{στον } \mathbb{R}^3]{f, g \text{ συν. μερ. παρ}} 0$$

(Θεώρημα Schwarz)

$(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3)$

Έστω F, G είναι δυο αστρόβιλα διανυσματικά πεδία. Δείξτε ότι το εξωτερικό τους γινόμενο είναι ασυμπίεστο διανυσματικό πεδίο.

// F, G αστρόβιλα στον $\mathbb{R}^3$, δηλ. $\nabla \times \bar{F} = \nabla \times \bar{G} = \bar{0}$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, άρα F, G συντηρητικά πεδία στον $\mathbb{R}^3$. Έτσι, $\exists\, f, g$ βαθμωτά πεδία στον $\mathbb{R}^3$, τ.ω $F = \nabla f$ και $G = \nabla g$. Έτσι, $\operatorname{div}(F \times G)$ $= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f \times \operatorname{grad} g) \xlongequal{\text{Άσκηση 3}} 0$.

Έστω $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : u = u(x,y,z)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους $2^{ης}$ τάξης. Αν $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι: (α) $\nabla \times (f(u)\nabla u) = \bar{0}$

(β) $\nabla \cdot (\bar{\alpha} \times f(u)\nabla u) = 0$, όπου $\bar{\alpha}$ σταθερό διάνυσμα

(γ) $\nabla \cdot (\nabla u \times \nabla f(u)) = 0$.

// (α) $\nabla \times (f(u)\nabla u) \overset{(1)}{=} (\nabla f(u)) \times \nabla u + f(u)\underbrace{\cancel{(\nabla \times \nabla u)}}_{\bar{0}}$

$= \left(f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}, f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}, f'(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right) \times \nabla u$

$= f'(u)\nabla u \times \nabla u = f'(u)(\underbrace{\nabla u \times \nabla u}_{\bar{0}}) = \bar{0}$

(β) $\nabla \cdot (\bar{\alpha} \times f(u)\nabla u) = \bar{\alpha} \cdot ((f(u)\nabla u) \times \nabla)$

$= -\bar{\alpha} \cdot (\nabla \times (f(u)\nabla u)) \overset{(\alpha)}{=\!=} -\bar{\alpha} \cdot \bar{0} = 0$

(γ) $\nabla \cdot (\nabla u \times \nabla f(u)) = \nabla \cdot (-\nabla f(u) \times \nabla u)$

$= -\nabla \cdot (\nabla f(u) \times \nabla u) \overset{(1)}{=\!=} -\nabla \cdot (\nabla \times (f(u)\nabla u))$

$\overset{(\alpha)}{=\!=} -\nabla \cdot \bar{0} = 0$

Αs είναι F ένα ασυμπίεστο πεδίο επί κυρτού τόπου $E \subset \mathbb{R}^3$, με συνεχείς μερικές παραγώγους $2^{ης}$ τάξης επί του E. Τότε $\exists$ αρμονική συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$.

Αποδ.

Με χρήση του Θεμελιώδους Θεωρήματος διανυσματικού λογισμού, το πεδίο F μπορεί να γραφεί ως: $F = \nabla \times G + \nabla f$, για κάποιο πεδίο G επί του E, και για κάποια βαθμωτή συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$.

Επειδή $\nabla \cdot F = 0$, έχω: $0 = \nabla \cdot F = \nabla \cdot (\nabla \times G + \nabla f)$

$= \nabla \cdot (\nabla \times G) + \nabla \cdot (\nabla f) = 0 + \underbrace{\nabla^2 f}_{\Delta f}$, άρα $\Delta f = 0$

, άρα f αρμονική.

Έστω $F(x,y,z) = (x^3, 2xyz - 3x^2y, -xz^2)$, $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Δείξτε ότι προέρχεται από διανυσματικό δυναμικό G, το οποίο και υπολογίστε. Είναι το G μοναδικό;

// F συνεχώς διαφορίσιμο, μιας και οι συνιστώσες του είναι συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις (πολυώνυμα)

Έτσι, αφού $\mathbb{R}^3$ κυρτός τόπος, για να προέρχεται το F από διανυσματικό δυναμικό G, αρκεί νδο F ασυμπίεστο, δηλ $\operatorname{div} F = 0$.

Είναι, $\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x} x^3 + \frac{\partial}{\partial y}(2xyz - 3x^2y) + \frac{\partial}{\partial z}(-xz^2)$

$= 3x^2 + 2xz - 3x^2 - 2xz = 0$, άρα $F = \nabla \times G$ με

$$G(x,y,z) = -(x,y,z) \times \int_0^1 t F(tx,ty,tz)\,dt$$

$$= -(x,y,z) \times \int_0^1 t(t^3x^3, 2t^3xyz - 3t^3x^2y, -t^3xz^2)\,dt$$

$$= -(x,y,z) \times \int_0^1 t^4(x^3, 2xyz - 3x^2y, -xz^2)\,dt$$

$$= -(x,y,z) \times (x^3, 2xyz - 3x^2y, -xz^2)\left(\frac{t^5}{5}\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{(x^3, 2xyz - 3x^2y, -xz^2) \times (x,y,z)}{5} = \boxed{\frac{1}{5}(3xyz^2 - 3x^2yz, -x^2z^2 - 2x^3, 4x^3y - 2x^2yz)}$$

Ο τύπος του πεδίου G δεν ειναι μοναδικός.

Ας ειναι $H = G + \nabla f$, f διαφορίσιμη πραγματική συνάρτηση $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Τότε $\nabla \times H = \nabla \times (G + \nabla f) = \nabla \times G + \nabla \times (\nabla f)$

$$= \nabla \times G + 0 = \nabla \times G = F$$

N' αποδειχθεί ότι ο χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι συνεκτικός.
(Ένα σύνολο λέγεται συνεκτικό αν μπορούμε να συνδέσουμε ένα οποιοδήποτε ζεύγος σημείων του με μια συνεχή καμπύλη η οποία βρίσκεται εξ' ολοκλήρου στο σύνολο αυτό).

// Έστω ότι $\mathbb{R}^n$ μη συνεκτικός. Τότε υπάρχουν δυο σύνολα A, B, η ένωση των οποίων μου δίνει το σύνολο $\mathbb{R}^n$, δηλαδή $\mathbb{R}^n = A \cup B$.
Θεωρώ από ένα σημείο σε καθένα από τα σύνολα A και B, με συντεταγμένες $\bar{r}_1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\bar{r}_2 = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ αντίστοιχα.
Τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος που ορίζουν τα $\bar{r}_1, \bar{r}_2$ είναι:

$$D = \{ \bar{r}_1 + t(\bar{r}_2 - \bar{r}_1),\ t \in [0,1] \} \subset \mathbb{R}^n$$

Τα σύνολα: $A_1 = \{ t \in \mathbb{R} : \bar{r}_1 + t(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \in A \}$ και $A_2 = \{ t \in \mathbb{R} : \bar{r}_1 + t(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \in B \}$, είναι χωρισμένα κι έχουν ως ένωση το διάστημα $[0,1]$.
Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί λόγω του αξιώματος πληρότητας το $[0,1] \subset \mathbb{R}$ είναι συνεκτικό (το $\mathbb{R}$ δεν έχει κενά μεταξύ στοιχείων του). Συνεπώς, ο χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι συνεκτικός

Ν' αποδειχθεί ότι τα μόνα υποσύνολα του χώρου $\mathbb{R}^n$, τα οποία είναι συγχρόνως ανοικτά και κλειστά, είναι το κενό σύνολο και ο ίδιος ο χώρος $\mathbb{R}^n$.

// Έστω ότι υπάρχει ένα σύνολο $A \neq \emptyset$ και $A \subset \mathbb{R}^n$, το οποίο είναι συγχρόνως ανοικτό και κλειστό.
Θεωρώ το συμπλήρωμα του A ως προς το χώρο $\mathbb{R}^n$, A^c.
Το A^c είναι επίσης ανοικτό και κλειστό συγχρόνως.
Συνεπώς, ο χώρος $\mathbb{R}^n$ μπορεί να γραφεί ως ένωση δύο μη κενών συνόλων, ανοικτών και ξένων μεταξύ τους, δηλαδή $\mathbb{R}^n = A \cup A^c$.
Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί ο χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι συνεκτικός.